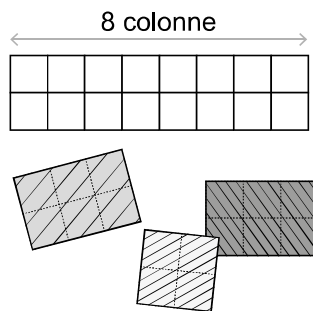


SOLUZIONI CON SPIEGAZIONI

Soluzione del problema della “Tassellazione colorata” (13)



Introduciamo la solita funzione $T(n)$ che conta le possibili tassellazioni di una tavola di n colonne e 2 righe. Risulta $T(1)=0$, perché le nostre tessere sono larghe almeno due quadratini, mentre $T(2)=1$ e $T(3)=2$. Per quanto riguarda $T(3)$, è utile ricordare che le tessere grandi hanno due possibili colorazioni. La tessera quadrata lascia sguarnite $n-2$ colonne, le tessere colorate $n-3$. Tutto considerato abbiamo trovato la legge ricorsiva: $T(n) = T(n-2) + T(n-3) + T(n-3)$, cioè

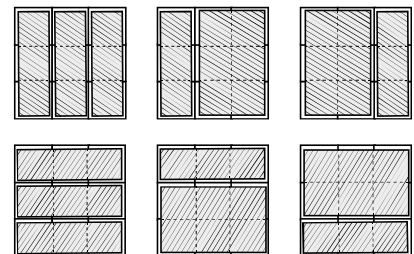
$$T(n) = T(n-2) + 2 \cdot T(n-3)$$

Usando i valori iniziali $T(1)=0$, $T(2)=1$ e $T(3)=2$, possiamo completare la seguente tabella e scrivere la soluzione: **13**.

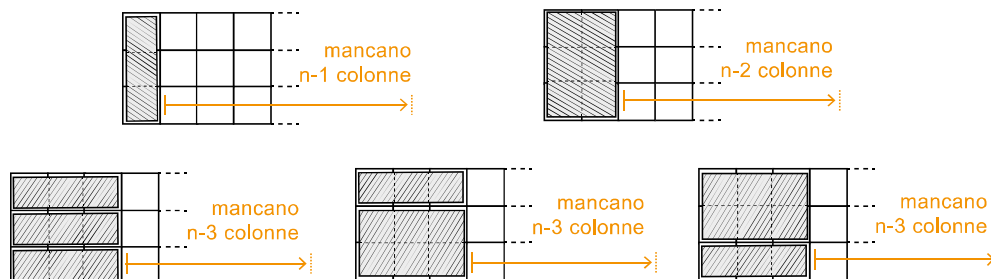
n	1	2	3	4	5	6	7	8
T(n)	0	1	2	1	4	5	6	13

Soluzione del problema di tassellazione di una tavola con tre righe (108)

La funzione di tassellazione $T(n)$ ormai la conosciamo, anche se stavolta si riferisce a una tavola di tre righe. Per quanto riguarda i valori iniziali osserviamo che $T(1)=1$, $T(2)=2$ e $T(3)=6$ (per quest'ultimo caso conviene guardare qui a fianco)



Occupiamoci ora di iniziare il lavoro ricoprendo completamente il bordo di sinistra. Ciò può essere fatto nei 5 modi mostrati in basso (che chiaramente si escludono a vicenda).



Considerando in ciascun caso il lavoro che ancora resta da fare, troviamo la legge $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + T(n-3) + T(n-3) + T(n-3)$, cioè

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 3 \cdot T(n-3)$$

Usando i valori iniziali $T(1)=0$, $T(2)=1$ e $T(3)=2$ possiamo compilare la seguente tabella e giungere infinte alla soluzione **108**.

n	1	2	3	4	5	6	7
T(n)	1	2	6	11	23	52	108

Soluzione dei problemi “Scalinata semplice” e “scalinata con trappola” (274)

Per risolvere il problema della scalinata semplice, consideriamo il numero $S(n)$ di passeggiate possibili (secondo le modalità indicate nel testo) su una rampa da n gradini. Il primo passo potrà essere da uno, due o al massimo tre gradini, il che lascerà al camminatore rispettivamente $S(n-1)$, $S(n-2)$ e $S(n-3)$ modi per concludere la salita. La legge $S(n)=S(n-1)+S(n-2)+S(n-3)$ corredata dei valori iniziali $S(1)=1$ (1), $S(2)=2$ (1+1; 2) e $S(3)=4$ (1+1+1; 1+2; 2+1; 3), permette di compilare la seguente tabella e giungere alla soluzione (274):

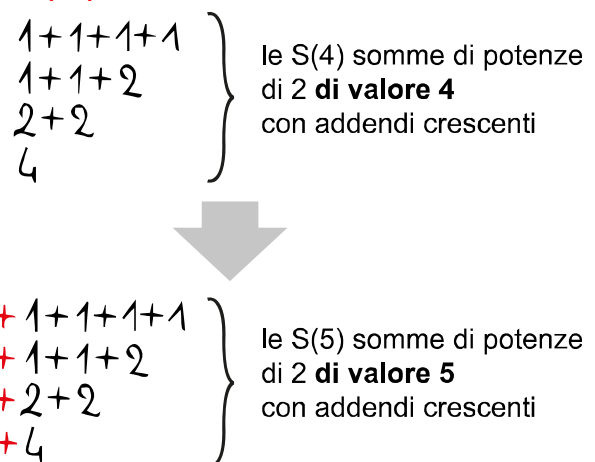
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S(n)	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274

Passiamo ora alla “scalinata con trappola” e immaginiamo in ogni caso di concludere la salita (nonostante le eventuali storte). Di tutti i percorsi che portano in cima, contiamo quelli che prevedano, ad un certo punto, un piede poggiato sul quinto gradino: per definizione vi sono $S(5)$ modi per raggiungere la posizione incriminata e quindi, una volta lì, $S(5)$ modi per concludere la scalinata. Dal momento che ciascun “primo tratto” si lega a ciascun “secondo tratto”, possiamo dire che i percorsi completi che poggiano sul quinto gradino sono dati dal prodotto $S(5)*S(5) = 169$. Sottraendo ai percorsi possibili (274) quelli “con storta”, otteniamo la soluzione $274 - 169 = 105$.

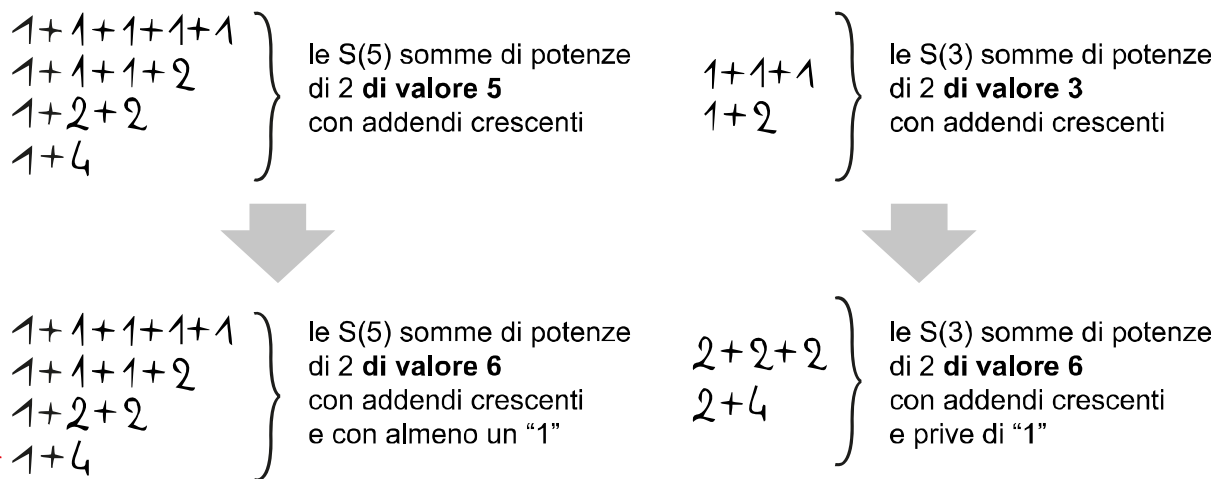
Soluzione del problema della somma di potenze di 2 (60)

Usiamo l’aiuto presente nel testo e consideriamo le somme ordinate di valore n che iniziano per “1”: esse si possono ottenere anteponendo un “1” alle somme di valore di $n-1$. Nel caso in cui n sia dispari, ogni addizione contiene necessariamente almeno un “1”, per cui abbiamo avremmo già trovato $S(n)=S(n-1)$.

Per capire il meccanismo, considerate l’esempio a fianco: si può vedere come tutte le addizioni di somma 5 siano state ricavate da addizioni di somma 4, semplicemente infilando un “1+” davanti a ogni calcolo.



Nel caso di n pari il discorso si complica, perché, alle addizioni con qualche “1” iniziale, si aggiungono quelle che ne sono prive. Le prime possono essere ricavate come visto prima, le seconde possono essere create raddoppiando il valore di tutti gli addendi delle somme pari a $n/2$. In basso l’esempio di $S(6)$ calcolato come $S(5) + S(3)$



Tutto considerato abbiamo la seguente regola ricorsiva:

se n è dispari $S(n) = S(n-1)$	se n è pari $S(n) = S(n-1) + S(n/2)$
----------------------------------	--

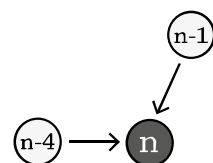
Dal valore iniziale $S(1)=1$ (banale) si ricavano tutti gli altri, compreso $S(20) = 60$ (vedi sotto)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S(n)$	1	2	2	4	4	6	6	10	10	14

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$S(n)$	14	20	20	26	26	36	36	46	46	60

Soluzione del problema “Cammini sulla griglia avvitata” (69)

Lo schema a fianco mostra che ogni nodo “ n ” che non sia della prima colonna, può essere raggiunto dai nodi “ $n-1$ ” e “ $n-4$ ”. Da notare che questa relazione vale anche per i nodi della prima riga a destra del primo. La legge ricorsiva per $n>3$ è quindi $c(n)=c(n-1)+c(n-4)$. Usando i valori iniziali $c(0) = c(1) = c(2) = c(3) = 1$ otteniamo la seguente tabella e quindi la soluzione (69).



n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T(n)$	1	1	1	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50	69

Soluzione del problema “Salire la scala senza annoiarsi” (27)

Seguiamo il suggerimento e chiamiamo A,B,C le camminate che iniziano rispettivamente con un passo da 1, 2 e 3 gradini. Indichiamo infine con $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ il numero di passeggiate delle tre tipologie, che portano in cima ad una scalinata di n gradini. Il classico “da qualche parte bisogna pur cominciare” non può che riferirsi al primo passo. Questa impostazione ci porta velocemente alle seguenti tre relazioni

$$A(n) = B(n-1) + C(n-1)$$

$$B(n) = A(n-2) + C(n-2)$$

$$C(n) = A(n-3) + B(n-3)$$

Le giustificazioni delle tre relazioni differiscono solo nei dettagli, consideriamo a titolo di esempio la seconda legge: iniziando con un passo da due gradini ne restano da percorrere $n-2$. Dovendo continuare la salita con un passo che non sia di 2 gradini, cioè con una passeggiata di tipo A o C, concludiamo che $B(n) = A(n-2) + C(n-2)$.

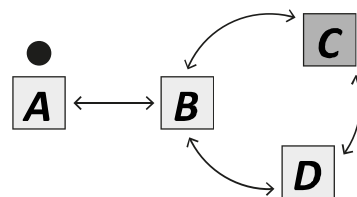
Queste semplici considerazioni, unite ai valori iniziali (facili da valutare e comunque presenti nel testo del problema), portano alla seguente tabella, alla quale abbiamo aggiunto un'ultima riga che contiene il totale, il valore che ci interessa ai fini del quesito.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A(n)	1	0	1	2	1	3	5	4	8	13
B(n)	0	1	1	0	2	3	2	5	7	7
C(n)	0	0	1	1	1	2	2	3	6	7
TOT	1	1	3	3	4	8	9	12	21	27

Soluzione dei problemi “Da una posizione all'altra” (31) (56)

Iniziamo considerando la prima variante, che prevede che a pallina si sposti ad ogni turno secondo lo schema a fianco.

Siamo ormai diventati abbastanza esperti da indovinare subito il significato delle funzioni $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$ e $D(n)$, i valori iniziali $A(0)=1$, $B(0)=C(0)=D(0)=0$ e le seguenti leggi ricorsive:



$$A(n) = B(n-1)$$

$$B(n) = A(n-1) + C(n-1) + D(n-1)$$

$$C(n) = B(n-1) + D(n-1)$$

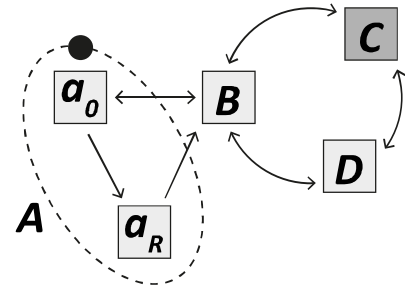
$$D(n) = B(n-1) + C(n-1)$$

La tabella sottostante, compilata a dovere, fornisce la soluzione $C(7) = 31$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
A(n)	1	0	1	0	3	2	11	14

B(n)	0	1	0	3	2	11	14	45
C(n)	0	0	1	1	4	6	17	31
D(n)	0	0	1	1	4	6	17	31

Nella seconda variante del problema, alle palline finite in A è concesso di stare ferme un turno (il riposo è facoltativo). Il modo più semplice per modellizzare questa situazione, è di introdurre un nuovo schema che contiene le due posizioni virtuali a_0 e a_R , che permettono di distinguere le palline in A: a_0 conta quelle che sono appena finite lì, a_R quelle a riposo dal turno precedente. Per quanto riguarda i valori iniziali abbiamo $a_0(0)=1$ e $a_R(0)=B(0)=C(0)=D(0)=0$. Lo schema a fianco permette di intuire subito le leggi ricorsive:



$a_0(n) = B(n-1)$	$a_R(n) = a_0(n-1)$	$B(n) = a_0(n-1) + a_R(n-1) + C(n-1) + D(n-1)$
$C(n) = B(n-1) + D(n-1)$	$D(n) = B(n-1) + C(n-1)$	

In basso i valori calcolati e la soluzione $C(7) = \mathbf{56}$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$a_0(n)$	1	0	1	1	3	6	14	31
$a_R(n)$	0	1	0	1	1	3	6	14
B(n)	0	1	1	3	6	14	31	70
C(n)	0	0	1	2	5	11	25	56
D(n)	0	0	1	2	5	11	25	56

Soluzione del problema “I movimenti del vassallo” (256)

A	L	A
L	X	L
A	L	A



Indichiamo le tessere come proposto del suggerimento (vedi a fianco)

Per raggiungere una casella A bisogna trovarsi in L. Da ogni cella di tipo L esistono due diverse mosse che portano su una posizione A. Vale quindi la relazione incorniciata a fianco.

$A(n) = 2 \cdot L(n-1)$

Da ogni cella di tipo A si possono fare due mosse diverse, mentre chi si trova in X ha quattro possibili salti: tutti questi spostamenti, diversi fra loro, portano a una cella di tipo L. Riassumendo abbiamo la relazione a fianco.

$L(n) = 2 \cdot A(n-1) + 4 \cdot X(n-1)$
--

$X(n) = L(n-1)$

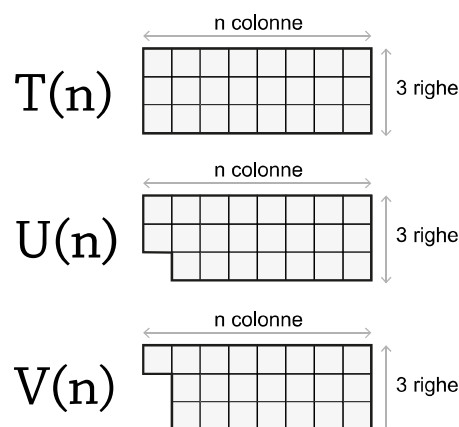
Per raggiungere la casella centrale X bisogna trovarsi in posizione L e da ogni cella L c'è sempre esattamente modo per raggiungere il centro. Questo conduce alla regola a fianco.

Grazie ai dati iniziali presenti nell'aiuto otteniamo la soluzione $X(6) = 256$.

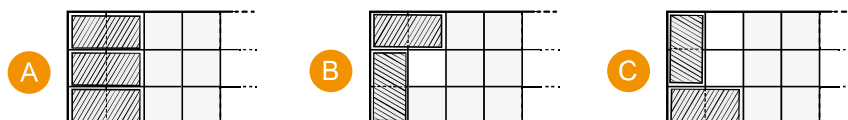
n	0	1	2	3	4	5	6
X(n)	1	0	4	0	32	0	256
L(n)	0	4	0	32	0	256	0
A(n)	0	0	8	0	64	0	512

Soluzione del problema "Dal male al bene" (153)

Consideriamo i tre tipi di tavola (T,U,V) illustrati fianco e le tre funzioni $T(n)$, $U(n)$ e $V(n)$ che contano il numero di tassellazioni delle tavole T,U,V a n colonne (la soluzione al quesito sarà quindi il valore $T(8)$).



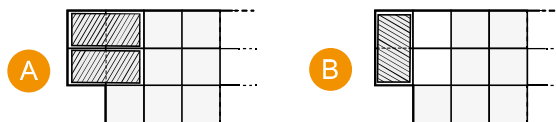
Iniziando la tassellazione dal bordo di sinistra di una tavola standard (quindi di tipo T), si possono effettuare le seguenti tre scelte (che si escludono a vicenda e coprono tutte le possibilità):



Otteniamo così la prima legge ricorsiva:

$$T(n) = T(n-2) + 2 \cdot U(n-1)$$

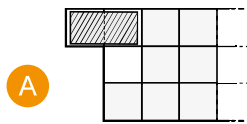
Consideriamo ora una tavola di tipo U e cerchiamo di ricoprire il bordo dello spuntone.



Emerge così la seconda legge ricorsiva:

$$U(n) = V(n-1) + T(n-1)$$

L'ultimo caso che analizziamo è la tassellazione di una generica tavola di tipo V: lo spuntone può essere ricoperto in un solo modo:

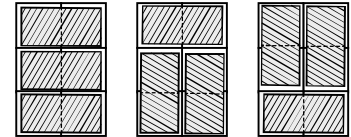


La terza legge ricorsiva è quindi poca cosa:

$$V(n) = U(n-1)$$

Osserviamo che per una questione di parità/disparità dei quadratini da ricoprire (ricordiamo che le tessere ricoprono ciascuna due quadratini), le funzioni $T(n)$, $U(n)$ e $V(n)$ assumono, una volta sì e una volta no, il valore zero, come si riconosce dalla tabella in basso. Per iniziare il conteggio è necessario trovare “a buonsenso” i valori $T(1)$, $T(2)$, $U(1)$ e $V(1)$: l'unico caso non banale $T(2) = 3$ è illustrato a fianco.

$$T(2) = 3$$



Utilizzando le relazioni $T(n) = T(n-2) + 2 \cdot U(n-1)$, $U(n) = V(n-1) + T(n-1)$ e $V(n) = U(n-1)$ siamo ora in grado di compilare la tabella in basso, completando una colonna per volta e procedendo dal basso verso l'alto.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$T(n)$	0	3	0	11	0	41	0	153
$U(n)$	1	0	4	0	15	0	56	/
$V(n)$	0	1	0	4	0	15	0	/

Osservazione: si ottiene di nuovo facilmente una legge ricorsiva nella sola funzione $T(n)$ (a costo di un numero maggiore di valori iniziali):

$$T(n) = 4 \cdot T(n-2) - T(n-4)$$

$$\text{con } T(1)=0, T(2)=3, T(3)=0, T(4)=11$$